На правах рукописи

Кудаева Фатимат Хусейновна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ПРИ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ НА БИОТКАНИ

1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Нальчик - 2025

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» (ФГБОУ ВО «КБГУ им. Х.М. Бербекова»)

Научный консультант:	**Вешнева Ирина Владимировна**, доктор технических наук, профессор кафедры информационные системы и технологии в обучении ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Официальные оппоненты:	**Ситник Сергей Михайлович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, институт инженерных и цифровых технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ»)
	Шишкина Элина Леонидовна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и прикладного анализа, факультет прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет
	Попов Виктор Сергеевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А»
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», Высшая школа технологий искусственного интеллекта

Защита диссертации состоится «____» _______ 20___ года в 14.00 на заседании диссертационного совета Д 24.2.392.08 на базе ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, 10-й учебный корпус, ауд.511.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте СГУ https://www.sgu.ru

Автореферат разослан «____» ___________ 20___года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 24.2.392.08
доктор технических наук, профессор И.В. Вешнева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Математическое моделирование фазовых переходов является одной из актуальных и современных проблем многих областей науки, в которых исследуемые процессы меняют свои свойства скачкообразно. Фазовый переход происходит и при низкотемпературном воздействии на биологическую ткань. На границе фазового перехода поддерживается постоянная температура, требуется определить положение раздела и температурное поле в различных участках биоткани.

Экспериментальное и теоретическое изучение возникающих тепловых процессов довольно сложно. Это связано с нелинейностью уравнения теплопроводности, которая описывает эти тепловые процессы, а также с необходимостью определения границы раздела фаз и части области, где происходит тепловой процесс. В связи с этим, большое значение приобретает создание и исследование математических моделей, описывающих эти процессы.

Представленная работа обусловлена как с трудностью изучения возникающих задач со свободной границей, так и разнообразием важных приложений этого круга задач. Тема относится к приоритетному направлению "Превентивная и персонализированная медицина, обеспечение здорового долголетия" (Указ Президента РФ №529 от 18.06.2024) и имеет самостоятельную значимость среди критических и сквозных наукоёмких технологий в области численных и вычислительных методов для медицины и биологии. Поэтому, настоящая тема является актуальной научной темой.

Степень проработанности темы. Математическое описание тепловых процессов с фазовыми переходами восходит к работам Г. Ламе и Б. Клапейрона[1]. Развитием стала модель Йозефа Стефана[2], позже названная «задачей Стефана».

Значительный вклад в исследование задач с фазовыми переходами внесли Л.И. Рубинштейн[3], А. Фридман[4], Б.В. Базалий[5], А.А. Березовский[6],

---

[1] Lame G., Clapeyron B.P. Memoire sur la solidification par refroidissement dun globe liquid (О затвердевании путём охлаждения жидкого шара)/Ann. Chimie Physique – 1831. – T.47, C. 250–256.

[2] Stefan, J. Uber Enige Probleme der Theorie der Warmeleitung/Sitzungsberichte der Kaiserlichen. Akadwmie der Wissenschaften in Wien. – 1889. – Vol.98. – P.173-184

[3] Рубинштейн Л. И. Проблема Стефана. — Рига: Звайгзне, 1967. — 458 с.

[4] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. - М.: Мир, 1968. - 427с

[5] Базалий Б.В., Шелепов В.Ю. Об одной смешанной задаче со свободной границей для уравнения Лапласа. ДАН СССР, 1973, т. 209, №2, с. 320-323

[6] Березовский А.А.Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. Ч. 1. Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах/Акад. наук УССР, Ин-т математики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. -ч.1 452 с., ч.2-292с.

А.М. Мейрманов[7], а также зарубежные ученые J.Crank[8], V. Alexiades[9], A.D. Solomon, рассмотревшие как аналитические и численные методы, так и вопросы устойчивости и разрешимости таких задач. Основные теоретические результаты получены в работах А.А. Самарского[10], С.П.Курдюмова[11], Г.Г.Еленина[12], А.П.Михайлова[13], В.А. Галактионова, К.Б.Павлова[14], Л.К. Мартинсона, А.Н. Тихонова[15], Н.С. Пискунова[16], О.А.Олейника[17], О.А.Ладыженской[18], Т.Д.Вентцеля[19], В.П. Маслова[20], М.И.Вишика[21], С.И. Похожаева[22], А.С. Калашникова[23], С.Н. Кружкова[24], С.Н. Антонцева[25], Ж.-Л. Лионса[26], Ф. Браудера[27]. Значительный вклад внесли также Я.В. Зельдович[28], А.В. Лыков[29], О.Б. Лыкова[30], Я.С. Барис, Л.А. Коздоба[31] и др.

---

[7] Мейрманов А. М. Задача Стефана. — Новосибирск: Наука, 1986. — 239 с.

[8] Crank J. Free and Moving Boundary Problems. — Oxford: Clarendon Press, 1984. — 425 p.

[9] Alexiades V., Solomon A. D. Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes. — Washington DC: Hemisphere Publ. Co, 1993. — 323 p

[10] Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 784 с

[11] Галактионов В. А. Два метода сравнения решений параболических уравнений. Доклады АН СССР, т.251, №4 (1980), С.832–835

[12] Еленин Г.Г., Мальков К. В. Об одном классе нелинейных эволюционных систем, описывающих процессы кристаллизации, Дифференциальные уравнения, т.24, №6 - 1988 - С.936–949

[13] Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А., Михайлов А. П. тепла в нелинейных средах//Дифференциальные уравнения. т.17, №10 – 1981.- С.1826–1841

[14] Мартинсон Л.К., Павлов К.Б. К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности//Журнал вычислительной математики и математической физики. т.12. №4 - 1972 - С.1048–1053

[15] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математический физики. М., Изд-во «Наука», 1966г., 724 с.

[16] Пискунов Н.С. Интегрирование уравнений теории пограничного слоя, Изв. АН СССР. Серия математическая. т.7, №1 (1943), 35–48

[17] Олейник О. А. Об одном методе решения общей задачи Стефана. Доклады АН СССР, 1960, 135, № 5, С.1054-1057

[18] Краевые задачи математической физики. Труды МИАН СССР. под. ред. О. А. Ладыженская, И. Г. Петровский. 1971.- 239 с.

[19] Вентцель Т. Д. Об одной задаче со свободной границей для уравнения теплопроводности//Доклады АН СССР. т.131. №5 - 1960- С.1000–1003

[20] Маслов В.П. Интегральные уравнения и фазовые переходы в вероятностных играх. Аналогия со статистической физикой, Теория вероятн. и ее примен., т.48, №2 (2003), С.403–411

[21] Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН, т.12, №5(77) (1957). С.3–122

[22] Похожаев С.И. Отсутствие глобальных решений нелинейных эволюционных уравнений. Дифференциальные уравнения. т.49, №5 (2013), 625–632

[23] Калашников А.С. Некоторые качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений порядка// Успехи математических наук. Т.42. вып.2(254) -1987. - С.136-176

[24] Кружков С.Н. Об одном классе задач с неизвестной границей для уравнения теплопроводности//Доклады АН СССР, т.178, №5 (1968), С.1036–1038

[25] Антонцев С. Н. О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений//Доклады АН СССР. т.260. №6. – 1981 - С.1289–1293

[26] Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир. 1971.- 372с.

[27] Браудер Ф. Функциональный анализ и уравнения в частных производных, Математика. т.4, №3. -1960 - С.79–106

[28] Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И. Об асимптотических свойствах автомодельных решений уравнений нестационарной фильтрации газа, Докл. АН СССР, т.118, №4. - 1958 - С.671–674

[29] Лыков А. В., Перельман Т.Л., Левитин Р.С., Гдалевич Л.Б. Сопряженный стационарный конвективный теплообмен пластины в газовом потоке//Доклады АН СССР. т.197, №1 – 1971. - С.50–51

[30] Лыкова О.Б., Барис Я.С. Приближенные интегральные многообразия. Киев. Наукова думка. 1993. – 315с.

[31] Коздоба Л. А., Чумаков В. Л. Решение нелинейных задач нестационарной теплопроводности методом возмущений, ТВТ, т.8, №5 (1970), С.1018–1024

Современные исследования направлены на изучение сложных нелинейных, многомерных, двухфазных и нестационарных постановок, что отражено в публикациях последних лет (Maestre I.R.[32], Belghazi H., Симонов О.А.[33], Филимонова Л.Н., Кудряшова Н.Ю.[34], Первухина Ю.В., Подгаев А.Г.[35], Ломов С.А.[36], Ломов И.С., Васильева А.Б.[37], Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. и др.)

Список изученных источников отражает эволюцию и современное состояние проблемы моделирования фазовых переходов, численных методов решения и их применение в различных областях.

Проблема. Современные исследования в области биохимии, биофизики и медицины все чаще требуют использования математического моделирования и численных методов для анализа сложных биологических процессов. Особое внимание уделяется разработке и применению вычислительных технологий, позволяющих формализовать и прогнозировать поведение биотканей под воздействием различных факторов. Математическое моделирование выступает одним из ключевых инструментов для создания адекватных моделей биохимических и биофизических процессов, с последующей реализацией их в виде комплексов программных средств. Несмотря на множество существующих математических моделей, описывающих тепловые процессы, методов их решения не получается адекватно описывать все процессы, происходящие при низкотемпературном воздействии на биологические ткани. Возникает проблема выбора оптимальной численной схемы, требующая оптимизации для различных типов живых тканей, необходимость разработки численных методов, учитывающие нелинейные физические свойства, изменяющиеся от температуры, времени воздействия. Поэтому, создание новых математических моделей, адекватно описывающих фазовые переходы при низкотемпературном воздействии на

---

[32] Maestre I. R., Cubillas P. R., Pérez-Lombard R. «Transient heat conduction in multi-layer walls: An efficient strategy for Laplace's method» // Energy and Buildings. — 2010. — 42. — P. 541–546.

[33] Симонов О. А., Филимонова Л. Н. Численное моделирование фазового перехода «вода — лед» в высокопроницаемых водонасыщенных пористых средах // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 1 (33). - 2023. - С. 22–38

[34] Кудряшова Н. Ю., Первухина Ю. В. Исследование разностных методов решения задачи теплопроводности с фазовыми переходами // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: сборник материалов XVI Международной научной конференции. (Саранск, 17-20 августа 2023 г.). - 2023. - С. 96-100

[35] Подгаев А.Г. Задача со свободной границей для нелинейного уравнения со сменой направления эволюции/ Челябинский физико-математический журнал. 2024. Т. 9, вып. 3. С. 407–425

[36] Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. – М.: Издательство Московского университета, 2011. - 456 с.

[37] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями//Дифференциальные уравнения и топология. I, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН, 268, МАИК «Наука/Интерпериодика», М. – 2010 –С. 268–283

биологические ткани, разработка конструктивных методов решения возникающих краевых задач, разработка эффективных численных методов, создание гибких и удобных в использовании программных продуктов на основе численных методов является актуальной перспективной научно-технической проблемой. Решение данной проблемы позволить повысить безопасность и эффективность процессов криоохлаждения биологических тканей in vivo.

Объект исследования: тепловые процессы низкотемпературного воздействия на биологические ткани, математические модели фазового перехода, описывающие эти процессы.

Предмет исследования: математические методы формирования математической модели теплового процесса, математические модели, численные методы, алгоритмы и комплексы программ анализа математического моделирования криовоздействия на биологические ткани.

Цель диссертационной работы: создать новые математические модели тепловых процессов при низкотемпературном воздействии на биологические ткани, основанные на задачах типа Стефана и оригинальном методе изотермических поверхностей. Разработать комплексы программ для численного решения таких задач на основе конструктивных численных методов, обеспечивающие эффективность и безопасности процессов криоохлаждения биологических тканей in vivo.

Для достижения поставленной цели исследования необходимо решить следующие **научные задачи:**

1. Анализ низкотемпературного воздействия на биологические ткани и разработка адекватных и эффективных математических моделей и методов математического моделирования.
2. Разработка методологии формализации и постановки задач анализа тепловых процессов при низкотемпературном воздействии на биологические ткани.
3. Построение математических моделей биофизических процессов охлаждения в форме начально-краевых задач, в том числе и для поля изотерм.
4. Исследование вопросов существования, единственности, монотонности и пространственной локализации решений задачи, описывающие процессы низкотемпературного воздействия на биологические ткани для точного прогнозирования и предотвращения повреждения биоткани.
5. На основе разработанных математических моделей и алгоритмов, а также их программных реализаций в составе проблемно-ориентированных

комплексов, осуществить развитие и совершенствование эффективных численных методов с целью их интеграции и применения в современных специализированных программных системах.

6. Оптимизация параметров моделей, для наиболее точного воспроизведения процессов, происходящих при низкотемпературном воздействии на биоткани и повышения точности прогнозирования результатов криовоздействия на биоткани.
7. На основе математических моделей и методов разработать комплексы программ для численного моделирования процессов криовоздействия на биологические ткани.

Решение данных задач позволит внести вклад в математическое моделирование, прогнозирование результатов криовоздействия на биологические ткани с целью повышения безопасности инвазивного криовоздействия in vivo.

Научная концепция диссертационной работы направлена на разработку современных математических моделей и алгоритмов с учётом особенностей обработки и интерпретации данных при низкотемпературном воздействии на биологическую ткань.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми и получены автором самостоятельно. Научная новизна выносимых на защиту результатов заключается в следующем.

1. Построены одномерные и двумерные математические модели низкотемпературного воздействия на биоткани, отличающиеся от существующих учетом индивидуальных различиях в тепловых и биологических свойствах биотканей и формы инструментов для криовоздействия. Предложенные модели позволяют с высокой точностью прогнозировать температурные поля и зоны воздействия для персонализированных условий (п.1, 3 паспорта специальности 1.2.2).
2. Разработана математическая модель в виде матрицы коэффициентов теплопроводности, основанной на использовании одномерной цепи Маркова. Разработка позволяет оптимизировать параметры модели, в соответствии с требованиями современной методологии математического моделирования, и использовать эффективные численные методы в комплексных программных решениях (п.1,3 паспорта специальности 1.2.2).
3. Сформулирована гипотеза: Построение модели фильтрации шума, в которой для обработки и интерпретации ошибок применяется метод, основанный на комплексных статусных функциях, позволяет повысить точность и надежность моделирования теплового поведения биотканей и

многослойных систем при низких температурах и фазовых переходах. (п.1,3,5,8 паспорта специальности 1.2.2).

4. Разработаны конструктивные методы решения одномерных и двумерных задач с фазовыми переходами при низкотемпературном воздействии на биоткани, включая начально-краевые задачи для поля изотерм (п.3,5 паспорта специальности 1.2.2).
5. Сформулированы и доказаны леммы и теоремы, обеспечивающие существование и единственность решений задач с фазовыми переходами, базирующиеся на условиях монотонности и пространственной локализации решений. Получена конечная оценка времени стабилизации решения к стационарному состоянию, что соответствует современным требованиям численных методов и вычислительных комплексов (п. 1,3 паспорта специальности 1.2.2).
6. Реализованы адаптированные численные методы для решения нелинейных алгебраических уравнений и задачи Коши, позволившие получить приближённые решения уравнений фазовых переходов при низкотемпературном воздействии на биоткани. Особенностью подхода стало использование модифицированных методов с каноническими разложениями случайных функций. Получены условия сходимости адаптированных численных алгоритмов, обеспечивающие надежность и эффективность вычислений, что соответствует современным требованиям разработки и применения численных методов в прикладном математическом моделировании (п.3 паспорта специальности 1.2.2).
7. Разработаны комплексы программ на основе математических моделей, алгоритмов и адаптированных численных методов. Разработки позволяют автоматизировать поиск решений, обеспечивают новые результаты в удобной форме, подтверждают сходимость численных решений к точным и демонстрируют устойчивость вычислений во времени, что соответствует современным требованиям математического моделирования и применению численных методов для создания эффективных программных комплексов вычислительных экспериментов. Эффективность и функциональность разработанных программных комплексов подтверждены свидетельствами программ для ЭВМ, выданными Федеральной службой по интеллектуальной собственности (Роспатент)[38] (п.3,8 паспорта специальности 1.2.2).

[38] Кудаева Ф.Х. Компьютерное моделирование низкотемпературного воздействия на биологические ткани в криохирургии. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2023663248, 21.06.2023.

Кудаева Ф.Х. Компьютерное моделирование низкотемпературного воздействия на биологические ткани сферическим аппликатором. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2023663249, 21.06.2023.

Методология и методы исследования. Методология исследования основана на создании математической модели, адекватно описывающей фазовые переходы при низкотемпературном воздействии на биоткани; в применении разработанных конструктивных математических методов решения задач; в использовании эффективных методов идентификации параметров теплофизических свойств с целью повышения достоверности результатов и их интеграции в практические приложения.

В диссертационной работе использованы: методы квазилинеаризации, включая метод эквивалентной линеаризации (нелинейных вариационных параметров, Крылова-Боголюбова-Митропольского); аналитические методы, локально-одномерный метод и численно-аналитический метод Ротэ; методы, основанные на первом и втором методах Лейбензона; методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, включая аналитические и численные методы, в зависимости от структуры и сложности задачи; численные методы, применяемые для решения нелинейных алгебраических уравнений и их систем, с акцентом на использование проекционных алгоритмов типа Фаэдо-Галеркина, а также эффективные алгоритмы для численного решения задачи Коши, что позволяет получать приближённые решения даже для сложных математических моделей; методы решения задач из теории вероятностей; методы из теории случайных процессов, в том числе метод канонического разложения случайных функций.

Теоретическая значимость работы. Проведено теоретическое исследование фундаментальных процессов, лежащих в основе низкотемпературного воздействия на биоткани. Разработанные математические модели, методы и алгоритмы компьютерного моделирования процессов низкотемпературного воздействия на биоткань, будут способствовать развитию математического моделирования в данной области. Предложенные методы могут быть использованы для моделирования, прогнозирования и обеспечения эффективности криовоздействия на биологические ткани in vivo.

Полученные теоремы, разработанные алгоритмы решения поставленных задач, численные методы и алгоритмы в виде комплексов программ позволят осуществить проверку существующих теорий влияния низкотемпературного

Кудаева Ф.Х. Компьютерное моделирование низкотемпературного в гипотермии. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2023661895, 08.06.2023

Кудаева Ф.Х. Компьютерное моделирование гипотермии и криодеструкция биологической ткани в медицине. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2023663248, 21.11.2023

Кудаева Ф.Х. Плоско-параллельная гипотермия и криодеструкция биологической ткани в медицине. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2023685979, 01.12.2023

Кудаева Ф.Х. Сферически-симметричная гипотермия и криодеструкция биологической ткани в медицине. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2023687262, 13.12.2023 воздействия на биоткани при построении математических моделей прикладных задач, а также помогут создать универсальные подходы при прогнозировании и оптимизации криовоздействия на биологические ткани.

Результаты диссертационной работы могут быть интересны специалистам в области физики, биологии, медицины, инженерии т.к. результаты представляют платформу для интеграции знаний в этих областях, а также специалистам, занимающимся разработкой вычислительных методов для решения сложных задач, что стимулирует развитие области вычислительной теплопередачи и биоинженерии.

Обоснованность и достоверность результатов диссертации обеспечивается математической корректностью поставленных задач, применением к ним классических математических методов, которые строго обоснованы в научной литературе, строгими математическими доказательствами сформулированных теорем, а также результатами проведенных вычислительных экспериментов.

Положения и результаты, выносимые на защиту:

1. Новые методы математического моделирования низкотемпературного воздействия на биологические ткани, позволяющие проводить расчеты процессов теплообмена, а также прогнозировать и оптимизировать низкотемпературное воздействие на живые ткани.
2. Численные методы на основе квазилинеаризации, дифференциальных и интегральных уравнений, а также численно-аналитические и стохастические алгоритмы, интегрированные в специализированные программные комплексы для вычислительного моделирования, что позволило получить новые результаты, оптимизирующие параметры криогенного воздействия и обеспечивающие высокую обеспечивающие высокую прогнозируемость поведения биотканей при воздействии низких температур в вычислительных экспериментах.
3. Новые математические модели – задачи типа Стефана, задачи для поля изотерм, определяющие влияние низкотемпературного воздействия на биологические ткани при деструкции сферическими, полусферическими и достаточно протяженными плоскими аппликаторами.
4. Концепция и комплекс проблемно-ориентированных программ для математических моделей, что позволило определить динамику температурного поля, матрицу коэффициентов теплопроводности и других теплофизических параметров биологической ткани.
5. Условия существования и единственности решений задач со свободными границами, основанные на переходе от задачи температурного поля к

вычислению поля изотерм, с применением условий монотонности и пространственной локализации для изотермических поверхностей. Доказаны соответствующие леммы и теоремы для различных постановок задач, включая вариационные формулировки. Получена оценка времени стабилизации решения к стационарному состоянию, что усиливает теоретические основы задачи Стефана с внедрением новых математических инструментов и методов оценки, соответствующих современным требованиям численных методов и вычислительных комплексов.

6. Аналитические, приближённые и численно-аналитические методы решения построенных математических моделей, описывающих тепловые процессы в биологических тканях при воздействии низких температур.
7. Гипотеза о возможности построения и проверки модели фильтрации шума, возникающий в процессе низкотемпературного воздействия на биоткани при фазовых переходах, в которой для обработки и интерпретации ошибок применяется метод статусных функциях, позволяющий улучшить качество фильтрации и повысить точность рассчитываемых результатов в задачах теплопереноса.

Практическая значимость результатов диссертации. Полученные результаты можно использовать: при усовершенствовании существующих и разработке новых способов низкотемпературного консервирования эмбрионов млекопитающих и других типов клеток; для диагностики функциональной полноценности клеток при реализации различных клеточных биотехнологий; в криомедицине для расчета режимов низкотемпературного воздействия на биологическую ткань, при определении значений параметров процесса замораживания, при конструировании и совершенствовании криоинструментов; в химической технологии для определения концентрации веществ, при переходе из одного агрегатного состояния в другое; при поиске оптимальных условий криоконсервирования биологических объектов; в строительстве, в нефтегазодобыче, в металлургии, в криобиологии и в других областях.

Реализация и внедрение. Результаты диссертации использованы на кафедре прикладной математики и информатики Кабардино-Балкарского государственного университета. В учебный процесс внедрены алгоритмы решения стационарных и нестационарных задач со свободными границами; аналитические методы исследования задач со свободными границами; методы решения интегральных и дифференциальных уравнений в области со свободными границами и нелинейной связью между искомыми функциями, формирующейся на каждом шаге в модели; численные методы и алгоритмы в виде комплексов проблемно-ориентированных программ при проведении вычислительного эксперимента для задач со свободными границами.

Разработанные комплексы программ для ЭВМ использовались для выполнения научно-исследовательских работ на кафедре прикладной математики и информатики Кабардино-Балкарского государственного университета.

Апробация научных результатов работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на конференциях: Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Нальчик, 2019–2025) ММТТ-31(Санкт-Петербург, 2018); ММТТ-36 (Нижний Новгород, 2023); ММТТ-38 (Самара, 2025); Международная конференция «International Conference on Mathematical Modeling, Control Systems, Automation and Energy Efficiency» (Липецк, 2019); Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2020); Международная конференция «Современные проблемы математической физики и математического моделирования» (Карши, Узбекистан, 2021, 2024); Международная научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» (Ташкент, 2019); Международная конференция «Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем» (Нальчик, 2019); Международная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 2021); Международная научно-практическая конференция «Фундаментальная наука для практической медицины - 2023» (Нальчик, 2023); Республиканская научно-техническая конференция «Современное состояние и перспективы развития цифровых технологий и искусственного интеллекта (Самарканд, 2022); Международный Форум «Вершины Кавказа» (Нальчик, 2023); Всероссийская научная конференция с Международным участием «Цифровая трансформация науки и образования» (Нальчик, 2020); Всероссийская научная конференция с международным участием «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Томск, 2023); Региональная научная конференция «Информационные технологии, искусственный интеллект и инновации в социальных, медицинских, экономических, технических и междисциплинарных исследованиях» (Нальчик, 2022); Региональная научная конференция «Информационные технологии, искусственный интеллект и инновации в науке и образовании» (Нальчик, 2023,2024), где они получили экспертную оценку и обсуждались в профессиональном сообществе.

Публикации. Основные теоретические и прикладные результаты диссертационной работы опубликованы: в 2-х монографиях; в 23 научных статьях рецензируемых в изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России, из них 12 статей опубликованы в журналах ВАК, поддерживающие специальность 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки), категории К1, К2; в 14 статьях – в изданиях, индексируемых в международных базах цитирования Scopus и Web of Science, в том числе 4 статьи опубликованы в журналах, поддерживающие специальность 1.2.2 (физико-математические науки), квартили Q3, Q4; в 51 статьях других изданиях и материалах научных конференций; в 6 свидетельствах о государственной регистрации программ для ЭВМ Роспатента Российской Федерации.

Личный вклад автора. Все основные результаты были получены независимо и лично, в частности, результаты, полученные с применением современных информационных и компьютерных технологий, теоретические расчеты, представленные в диссертации. Построены одномерные и двумерные математические модели низкотемпературного воздействия на биоткани, отличающиеся от существующих моделей, тем, что построенные модели учитывают индивидуальные различия в тепловых и биологических свойствах биотканей, формы инструментов для криовоздействия. В работах, написанных совместно с соавторами, автору принадлежат более 90% материала работ. В работах, автору принадлежат постановки задач, а также разработанные методы и реализации математических моделей и критериев.

Структура и объем диссертации. Объем диссертационного исследования составляет 434 страницы, в тексте представлено 57 иллюстраций и 38 таблиц. Работа структурирована следующим образом: введение, пять глав, заключение, список литературы из 304 наименований и 15 приложений.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность проблемы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость диссертации.

В **первой главе** выполнен анализ проблем криоохлаждения биологических тканей, выявлены причины, тенденции и перспективы. Проведен анализ и систематизация основных математических моделей теплопереноса в биологических тканях, используемых в современной научной литературе, с учётом их приложения и ограничения, что обеспечивает теоретическую базу для дальнейшего развития численных методов и прикладных вычислительных комплексов.

Получены следующие результаты:

1. Предложена формальная постановка задачи исследования тепловых процессов воздействия на биологические ткани низкими температурами.
2. Разработана методология формализации анализа низкотемпературных воздействий на биоткани.

Проведенный анализ показал необходимость создания математических моделей низкотемпературного воздействия на биоткани с разработкой новых методов моделирования и численных алгоритмов для интеграции в проблемно-ориентированные комплексы, а также проверкой адекватности моделей и исследованием существования, единственности, монотонности и локализации решений соответствующих задач.

Перечисленные направления исследований определили содержание и структуру данной диссертационной работы.

Во **второй главе** проведены теоретические исследования задач с фазовыми переходами и построена модель со свободными границами для описания динамики нестационарного температурного поля, а также фронтов криовоздействия и замораживания в биоткани:

$$
\begin{gathered}
div(\lambda(T)gradT)-\frac{\partial e(T)}{\partial t}=-W(T), \quad p\in\Omega(t), \quad t>0,\\
T(p,0)=\overline{T}, \quad p\in\Omega(0),\\
\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial n}=\alpha(p)[T-T_c(p,t)], \quad p\in S(p,t)=0, \quad t>0,\\
T=\overline{T}, \quad \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial n}=0, \quad p\in\Gamma(p,t)=0, \quad t>0,\\
T(p,t)=T^*, \quad p\in\Phi^*(p,t)=0.
\end{gathered} \tag{1}
$$

В задаче (1) $T=T(p,t)$ – искомое температурное поле, $\Gamma(p,t)=0$ - неизвестная поверхность влияния криовоздействия, $\Phi^*(p,t)=0$ - неизвестная поверхность раздела фаз, $\Omega(t)$ - область биологической ткани, где происходит процесс низкотемпературного воздействия, $S(p,t)=0$ - известная часть область биологической ткани, $\lambda(T)$ – коэффициент теплопроводности, $e(T)$- удельная тепловая энергия, $w(T)$ – источник тепла, $\alpha(p)$ – коэффициент теплообмена с окружающей средой, $T_c(p,t)$ – температура внешней среды, $\overline{T}$ – температура биологической ткани ($\overline{T}=36{,}6^0C$), T^* - температура замораживания ($T^*=0^0C\div-3^0C$), n – нормаль к поверхности $S(p,t)=0$, *(p:(x,y,z))* – пространственная координата, t – временная координата.

Задача (1) сведена к каноническому виду, из которой вытекают одномерные и двумерные модели при различных теплофизических характеристиках.

Для определения поля изотерм в данной главе получена задача на сопряжение со свободной поверхностью:

$$Az = c(u)\rho(u)\frac{\partial z}{\partial t} + w(u)\frac{\partial z}{\partial u}, \quad x,y,u \in \Omega_u(t), \quad u \neq u^*, \quad t > 0,$$
$$z(x,y,u,0) = z_0(x,y,u), \quad x,y,u \in \Omega_u(0),$$
$$z(x,y,\underline{u},t) = \underline{z}, \quad z(x,y,\overline{u},t) = \overline{z}, \tag{2}$$
$$\lambda\frac{z_n}{z_u} + \alpha(u-u_c) = 0, \quad x,y,u \in \partial\Omega_u(t), \quad u \neq u^*,$$
$$[z]_{u^*} = 0, \quad [\frac{\lambda(u)}{z_u}(\nabla z,\nabla z)]_{u^*} = -p\frac{\partial z^*}{\partial t}, \quad z^* = z(x,y,u^*,t).$$

где $Az = \nabla_\tau(\lambda\nabla_\tau \mathrm{z}) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda\frac{(\nabla \mathrm{z})^2}{z_u}\right)$, $\nabla z = i\frac{\partial z}{\partial x} + j\frac{\partial z}{\partial y} + k$, $\nabla_\tau(\lambda\nabla_\tau \mathrm{z}) = \lambda\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$, λ - коэффициент теплопроводности, $z = z(x,y,u,t)$ - поверхность уровня, *x, y* – пространственные переменные, *t* – время.

Справедлива лемма 1.

Лемма 1. Пусть функция z=z(x,y,u,t) определена и гладка по переменным x, y, u, t в области определения $x,y,u \in \Omega_u(t), \quad u \neq u*, \quad t > 0$, u=u(x,y,z,t) - температурное поле, коэффициенты c(u), ρ(u), w(u) неотрицательны и непрерывны, а функция z строго монотонна по переменной u при фиксированных x, y, t. Тогда дифференциальный оператор

$$Az = \nabla_\tau(\lambda\nabla_\tau) - \left(\lambda\frac{(\nabla z)^2}{z_u}\right)_u,$$

где $\nabla_\tau(\lambda\nabla_\tau z) = \lambda\big(z_{xx} + z_{yy}\big), \nabla z = \vec{\imath}z_x + \vec{\jmath}z_y + \vec{k}$, является монотонным.

Монотонность оператора *Az*, позволило доказать теорему единственности задачи Стефана для поля изотерм при низкотемпературном воздействии на биологические ткани.

Имеет место теорема 1.

Теорема 1. Если оператор $Az = \nabla_\tau(\lambda\nabla_\tau z) - (\lambda\frac{(\nabla z)^2}{z_u})_u$ является монотонным, то задача для поля изотерм, соответствующая (1) имеет единственное решение.

Третья глава содержит построение и исследование одномерных математических моделей при деструкции биотканей сферическими, полусферическими и достаточно протяженными плоскими аппликаторами.

При использовании криоинструментов с аппликаторами сферической и полусферической формы динамика температурного поля биологических тканей определяется решением следующей задачи со свободной границей:

$$u_{xx}-\chi^2[k+(1-k)\eta(x-u)]\frac{\partial u}{\partial t}=\chi^2x^{1-\beta}u^\beta\eta(x-u),\quad 1<x<s(t),\quad t>0,$$
$$u(x,0)=0,\quad 1<x<s(0),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}-[H+(h-H)\eta(1-u)]u=-g(t)+(1-\gamma)\mu\eta(u-1),\quad x=1,\quad t>0, \tag{3}$$
$$u(s(t),t)=0,\quad \frac{\partial u(s(t),t)}{\partial x}=0,\quad t>0,$$
$$[u]_{x^*}=0,\quad \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x^*}=\chi^2Px^*\frac{dx^*}{dt},t>0.$$

В задаче (3) определению подлежат температурное поле *u=u(x,t),* свободная граница *s=s(t), и* граница раздела фаз *x*=x*(t).*

Справедлива лемма 2.

Лемма 2. Стационарная задача, соответствующая (3) эквивалентна задаче со свободной границей вида:

$$Lu(x)=0, 0<x<s,$$
$$u(0)=\varphi_0,\ u(s)=\varphi_1, B(u,s)=0,$$

где L - дифференциальный оператор, $B(u,s)$ - краевое условие на свободной границе $x=s$, φ_0, φ_1- заданные значения.

Если $\varphi_1<\varphi_0$, то задача (3) допускает точное аналитическое решение следующего вида

$$u(x)=f(x,x^*,s)$$

где x^* и s положительные решения системы нелинейных уравнений

$$F_1(x*,s)=0,$$
$$F_2(x*,s)=0,$$

причём функции F_1, F_2 определяются структурой задачи и условиями на границах.

Динамика охлаждения биологической ткани описывается решением следующей задачи со свободной границей:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=\chi^2x^{1-\beta}u^\beta,\quad 1<x<s(t),\quad t>0,$$
$$u(x,0)=0,\quad 1<x<s(0),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}-hu=-h\varphi(t),\quad x=1,\quad t>0, \tag{4}$$
$$u(s(t),t)=0,\quad \frac{\partial u(s(t),t)}{\partial x}=0,\quad t>0,$$

где $\varphi(t)=\frac{g(r)}{h}$.

Имея в виду асимптотическую устойчивость решения задачи (4), примем $u(x,t)=u(x)+v(x,t)$, где $u(x)$ – решение соответствующей стационарной задачи с $s(t)=s=const$. Функция $v(x,t)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial t}=F(x,v),\quad 1<x<s(t),\quad t>0,$$

$$v(x,0)=v_0(x),\quad 1<x<s(0),$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}-\vartheta v=-\vartheta\varphi(t),\quad x=1,\quad t>0, \tag{5}$$
$$v(s(t),t)=-u(s(t)),\quad \frac{\partial v(s(t),t)}{\partial x}=-\frac{\partial u(s(t),t)}{\partial x},\quad t>0.$$

Если $\vartheta>>1\quad(h>>1)$, то $v(1,t)=\psi(t)$.

Решение задачи (5) найдено в виде суммы тепловых потенциалов:

$$v(x,t)=\int\limits_1^{x(0)} G(x,t;\xi,0)v_0(\xi)d\xi+\int\limits_0^1 \frac{\partial G(x,t;1,t')}{\partial\xi}\psi(t')dt'+$$
$$+\int\limits_1^{x(0)} G(x,t;s(t'),t')\mu(t')dt+\int\limits_0^1\int\limits_1^{x(t')} G(x,t;\xi,t')F(\xi,v)d\xi dt' \tag{6}$$

где

$$G(x,t;\xi,t')=G_0(x-1,t;\xi-1,t')-G_0(1-x,t;\xi-1,t'),$$
$$G_0(x,t;\xi,t')=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-t')}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t')}}. \tag{7}$$

Для $0\le\beta<1$ решена стационарная задача со свободной границей для уравнения типа Эмдена-Фаулера. К решению задачи адаптированы метод Ротэ, конечномерная аппроксимация.

Теорема 2. При достаточной гладкости функции *u(x)* и ограниченности параметров χ,h,φ,β существует единственное непрерывное неотрицательное решение *u(x)* задачи (4) на отрезке $x\in[1,s]$ и соответствующее значение свободной границы *s*.

Методом нелинейных вариационных параметров для определения свободной границы s(t) получена задача Коши:

$$\frac{1-\beta}{1+\beta}\chi^2(s-1)\frac{d\bar{u}(s)}{dt}+\left[\frac{2\chi^2\bar{u}(s)}{(1-\beta)h(s-1)^{(3-\beta)(1-\beta)}}\int\limits_1^s(s-x)^{\frac{1+\beta}{1-\beta}}(x-1)dx\right]\frac{d}{dt}-$$
$$-\chi^2\int\limits_1^s x^{1-\beta}\,\bar{u}^\beta(x,t)dx+\frac{2\bar{u}(s)}{(1-\beta)(s-1)},\qquad s(0)=0. \tag{8}$$

Найдено приближенное решение задачи:

$$\bar{u}(x,t)\approx\bar{u}(x,t)=u(1)\left[1-\frac{x-1}{s(t)-1}\right]^{\frac{2}{1-\beta}}, \tag{9}$$
$$\bar{u}(t)=\bar{u}(s)=\frac{(1-\beta)h\varphi(s-1)}{2+(1-\beta)h(s-1)}. \tag{10}$$

Доказана, что имеет место стабилизация решения задачи к решению стационарной задачи за конечное время.

Разработан программный комплекс для ЭВМ «Сферически-симметричная гипотермия и криодеструкция биологической ткани в медицине», который определяет максимальный размер охлаждения, динамику температурного поля, строит график динамики температурного поля. Проведены расчеты. Результаты расчета представлены на рис.1

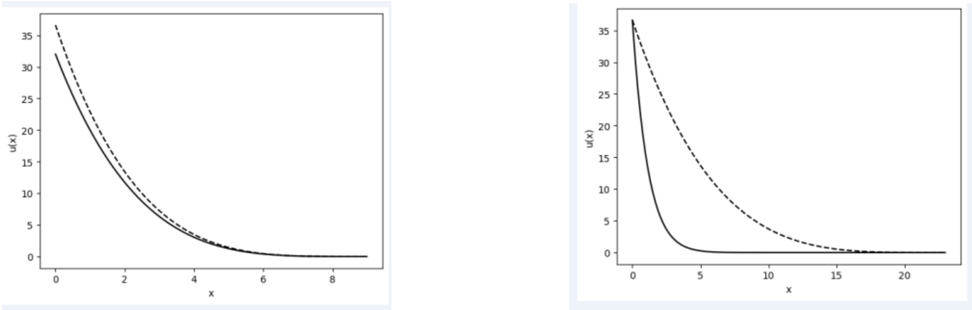


Рис.1 Распределение температурного поля

При деструкции тканей протяженными плоскими аппликаторами определение динамики температурного поля сводится к решению следующей задачи со свободными границами для нелинейных эволюционных уравнений:

$$
\begin{gathered}
0<t<t_1: u_{xx}-\frac{\partial u}{\partial t}=u^{\beta}, \quad 0<x<s(t), \\
u(x,0)=u_0(x), \quad 0<x<s(0), \\
\frac{\partial u}{\partial x}-Hu=-H\varphi(t), \quad x=0, \\
u(s(t),t)=0, \quad \frac{\partial u(s(t),t)}{\partial x}=0, \quad u(0,t_1)=1;
\end{gathered} \tag{9}
$$

$$
\begin{gathered}
t_1<t<t_2: \quad u_{xx}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}=0, \quad 0<x<x^*(t), \\
u_{xx}-\frac{\partial u}{\partial t}=u^{\beta}, \quad x^*(t)<x<s(t), \\
\frac{\partial u}{\partial x}-Hu=-H\varphi(t), \quad x=0, \\
[u]_{x^*}=0, \quad [\frac{\partial u}{\partial x}]_{x^*}=Px_t^*, \quad u(x^*(t),t)=1, \\
u(s(t),t)=0, \quad \frac{\partial u(s(t),t)}{\partial x}=0, u(0,t_2)=u_n;
\end{gathered} \tag{10}
$$

$$
\begin{gathered}
t>t_2: \quad u_{xx}-\frac{\partial u}{\partial t}=u^{\beta}, \quad x^{**}(t)<x<s(t), \\
u_x-Hu=-H\varphi(t), \quad x=0, \\
[u]_{x^{**}}=0, \quad [\frac{\partial u}{\partial x}]_{x^{**}}=P_1x_t^{**}, \quad u(x^{**}(t),t)=1, \\
u(s(t),t)=0, \quad \frac{\partial u(s(t),t)}{\partial x}=0, \\
[u]_{x^*}=0, \quad [\frac{\partial u}{\partial x}]_{x^*}=Px_t^*, \quad u(x^*(t),t)=1.
\end{gathered} \tag{11}
$$

Получено точное аналитическое решение стационарной задачи, которое помогает найти максимальные размеры замораживания x^* и теплового возмущения s.

$$x ** = \frac{\varphi - u_п}{\sqrt{2(1+\beta)^{-1}}} - \frac{1}{H},$$
$$x * = \frac{\varphi - 1}{\sqrt{2(1+\beta)^{-1}}} - \frac{1}{H}, \quad (12)$$
$$s = \frac{\sqrt{2(1+\beta)}}{1-\beta} + (\varphi - 1)\sqrt{\frac{1+\beta}{2} - \frac{1}{H}}.$$

Лемма 3. Пусть все коэффициенты (теплопроводности, теплоемкости, параметры кровотока и др.) и граничные функции задачи (9)–(11), непрерывны и ограниченны. Тогда существует единственное непрерывное стационарное решение u(x) и единственное положение границы фазового перехода x*. При этом максимальные параметры замораживания x* и теплового возмущения s определяются из (12).

Лемма 3 обеспечивает единственность стационарного решения задачи с фазовыми переходами, что гарантирует однозначность физической интерпретации модели и надежность математического описания процесса.

Теорема 3. Пусть уравнение *f(v)=0* имеет единственный корень на отрезке $[a;b]$ и выполнены условия: 1) *f(v)* определена и дифференцируема на отрезке [a;b]; 2) $f(v) \in [a,b]$ для всех $v \in [a;b]$; 3) Существует такое действительное q, что $|f'(v)| \le q < 1$ для всех $v \in [a;b]$. Тогда итерационная последовательность $v_n = f(v_{n-1})$, $n = 1,2,\ldots$ сходится при любом начальном приближении $v_0 \in [a;b]$.

С помощью функции Грина и формулы Грина на каждом временном слое решение задачи сведено к системе нелинейных интегральных уравнений.

Методом нелинейных вариационных параметров, найдено приближенное решение:

$$u(x,t) = \begin{cases} \overline{V}(t) + [1 - \overline{V}(t)]\dfrac{x}{x^*(t)}, & 0 < x < x^*(t), \\ \left(\dfrac{s(t) - x}{s(t) - x^*(t)}\right)^{\frac{2}{1-\beta}}, & x^*(t) < x < s(t), \end{cases} \quad (13)$$

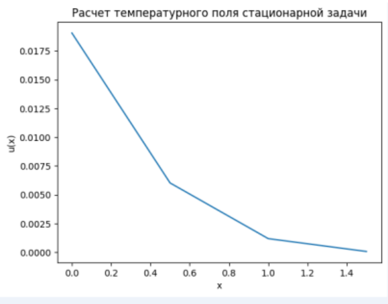
$$\overline{V}(t) = 1 + \frac{H(\varphi - 1)x^*(t)}{1 + Hx^*(t)}. \quad (14)$$

Для определения свободной границы получена задача Коши

$$\frac{ds}{dt} + \frac{2}{1-\beta}\frac{dx*}{dt} + \frac{3-\beta}{1+\beta}(s - x*) - \frac{2(3-\beta)}{(1-\beta)^2}\frac{1}{s - x*} = 0\,,$$
$$\frac{ds}{dt} + \left\{\left[\frac{(\varphi-1)x*}{2a^2(H^{-1} + x*)} + P\right]x*\right\} - \frac{\varphi - 1}{H^{-1} + x*} + \frac{2}{(1-\beta)}\frac{1}{s - x*} = 0\,, s(0) = 0\,, \quad (15)$$

Для задачи криодеструкции методом Ротэ получена система краевых задач со свободными границами. С помощью функций Грина и формул Грина задача сведена к решению нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна в незамороженной области, системы двух нелинейных уравнений относительно x^* и s и квадратуре в замороженной области.

Разработан программный комплекс для ЭВМ «Плоско-параллельная гипотермия и криодеструкция биологической ткани в медицине», состоящий из программ: программа 1 определяет максимальный размер замораживания, температуру биологической ткани вначале процесса охлаждения методом Ньютона-Рафсона, динамику температурного поля; программа 2 строит график динамики температурного поля. Проведены численные расчеты с применением программного комплекса. Результаты расчета на рис.2



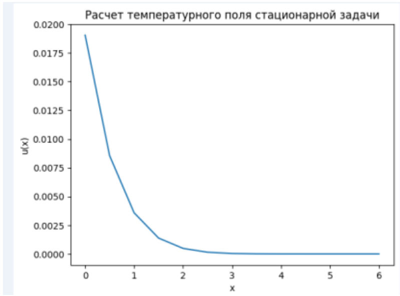


Рис.2. Распределение температурного поля

Разработан программный комплекс для ЭВМ «Компьютерное моделирование гипотермии и криодеструкция биологической ткани в медицине», состоящий из программ: первая решает задачу Коши для определения неизвестной свободной границы области, где происходит процесс низкотемпературного воздействия на биологическую ткань; вторая строит график динамики температурного поля.

Разработанные проблемно-ориентированные программные комплексы подтверждены свидетельствами Роспатента. Их применение автоматизировало решения задач с фазовыми переходами, повысило точность расчётов, обеспечило удобный формат вывода, сходимость и временную устойчивость численных решений. Проведены проверки адекватности моделей на основе вычислительных экспериментов, представленных в главе 5.

Проводится исследование математической модели управляемой плоско - параллельной криодеструкции биологической ткани:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+W(u)=c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t}-p\,\frac{dz^*}{dt}\,\delta\left(z-z^*\right),$$
$$z_0<z<\infty\,,\quad t>0\,,$$

$$u(z,0)=u_T\,,\quad \lambda(u)\frac{\partial u}{\partial z}-\alpha\left(u-u_A\right)=0\,,\quad z=z_0\,, \qquad (16)$$

$$\lim_{z\to\infty} u(z,t)=0, \quad u(z^*,t)=u^*,$$

где $W(u)=W_0(u_T-u_k)$, $\lambda(u)$ - коэффициент теплопроводности, $c(u)$ - коэффициент теплоемкости, $\rho(u)$ -плотность, u_T -температура биологической ткани в начальный момент времени, u_A- температура аппликатора, α- коэффициент теплообмена с окружающей средой.

После перехода к безразмерным величинам и параметрам

$$u=u_\tau+(u_\tau-u_k)\Theta, \quad z=z^*x, \quad t=\frac{c_з\rho_з}{\lambda_з}z^{*2}\,\tau,$$
$$\lambda(u(\Theta))=\lambda_з\gamma(\Theta), \quad c\rho=c_з\rho_з K(\Theta), \quad W=W_0(u_T-u_k)\beta(\Theta),$$
$$\Theta_A(\tau)=\frac{u_A(t(\tau))-u_T}{u_T-u_k}, \quad h=\frac{\alpha z^*}{\lambda_з}б \quad P=\frac{p}{c_з\rho_з(u_T-u_k)}, \tag{17}$$
$$W=\frac{W_0z^{*2}}{\lambda_з}, \quad \beta(\Theta)=\Theta\eta(\Theta-\Theta^*),$$

где z^* - максимальный размер замороженной области биологической ткани, достигаемый в стационарном состоянии, задача (16) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)-W\beta(\Theta)=K(\Theta)-P\frac{dx^*}{d\tau}\delta(x-x^*), \quad 0<x<\infty, \quad \tau>0,$$
$$\Theta(x,0)=0,$$
$$\gamma\frac{\partial\Theta}{\partial x}=\tilde{h}(\Theta-\Theta_A), \quad x=0, \quad \tau>0, \quad (\tilde{h}=\gamma h), \tag{18}$$
$$\lim_{x\to\infty}\Theta(x,\tau)=0, \quad \Theta(x,\tau)=\Theta^*.$$

В (18) $\beta(\Theta)=\Theta\eta(\Theta-\Theta^*)$, где $\eta(\Theta)$ - функция Хевисайда.

Преобразованием Лапласа для изображения получено выражение

$$\bar{\theta}(x,p)=\bar{\theta}\cdot\frac{\exp\left(-\sqrt{W+Kp}\,x\right)}{\sqrt{h+\gamma\sqrt{W+Kp}}}, \quad \operatorname{Re}\left(\sqrt{W+Kp}\right)>0, \tag{19}$$

а оригинал определяется по общей формуле обращения:

$$\Theta(x,p)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \overline{\Theta}(x,p)e^{p\tau}dp\,. \tag{20}$$

Найдено время замораживания поверхности биологической ткани

$$\tau^*=ln\left[1-|\Theta^*|\left(1+\sqrt{\frac{W_0\lambda_T}{\alpha}}\right)\right]^{-\frac{1}{\beta}}. \tag{21}$$

Если сравнить результаты расчета с известными экспериментальными данными из литературных источников, температура поверхности ткани не ниже температуры охлаждающей поверхности криозонда $\Theta_- \geq \Theta_A(\tau)/\Theta_- =$

$\Theta_A(\tau)$ при $\alpha = \infty$. Результаты расчета зависимостей $\Theta_A = \Theta_A(\tau)$ и $\Theta_- = \Theta_-(\tau)$ представлены на рис.3, 4.

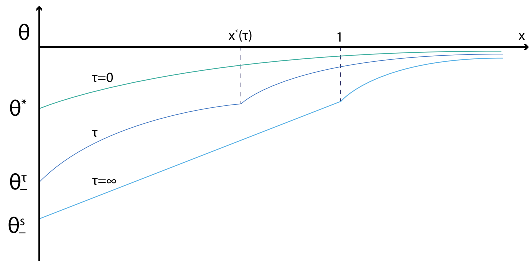


Рис. 3. Температурное поле

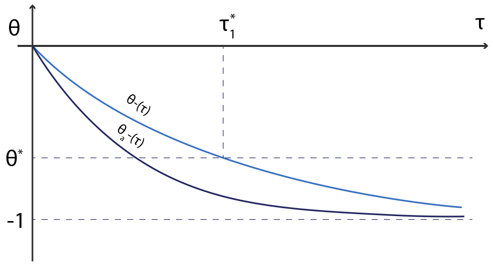


Рис.4. Температурное поле

Методом Лейбензона получено явное выражение для времени замораживания поверхности биологической ткани

$$\tau^* = ln\left[1 - |\Theta^*|\left(1 + \sqrt{\frac{W_0\lambda_T}{\alpha}}\right)\right]^{-\frac{1}{\beta}}. \tag{22}$$

Для случая идеального теплового контакта охлаждающей поверхности криозонда с поверхностью биологической ткани предельным переходом $h \to \infty$ получено

$$\tau = \frac{1}{1 + \Theta *}(P + K|\Theta *| + \frac{1 + \Theta *}{2})[-x - ln(1 - x)]. \tag{23}$$

Получено рекуррентное соотношение для определения положительного корня изотермы

$$x_n = \frac{A(\tau_n)x_{n-1} - \Delta\tau + \sqrt{[A(\tau_n)x_{n-1} - \Delta\tau]^2 + 4[A(\tau_n) + c\tau_n\Delta\tau]\varphi(\tau_n)\Delta\tau}}{2[A(\tau_n) + c\tau_n\Delta\tau]} \tag{24}$$

Результаты расчета представлены на рис.5, 6.

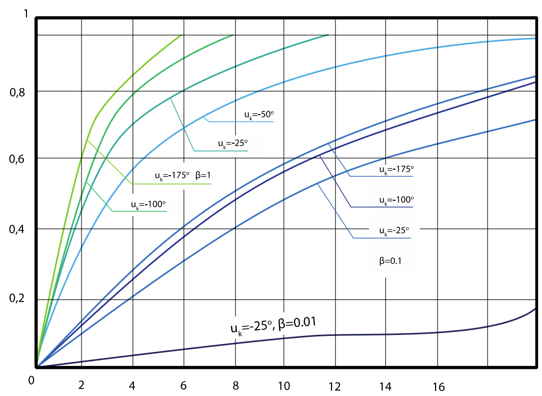


Рис.5. Температурное поле

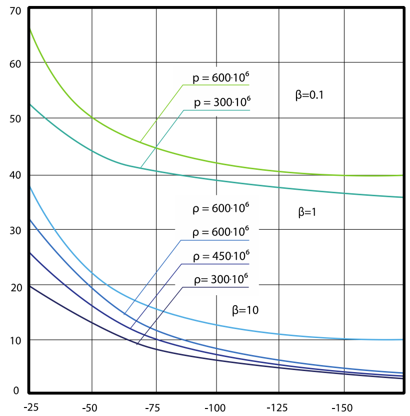


Рис.6. Зависимость времени от β и теплоты кристаллизации

Результаты расчета для управляемой плоскопараллельной криодеструкции при неидеальном тепловом контакте представлены на рис.7.

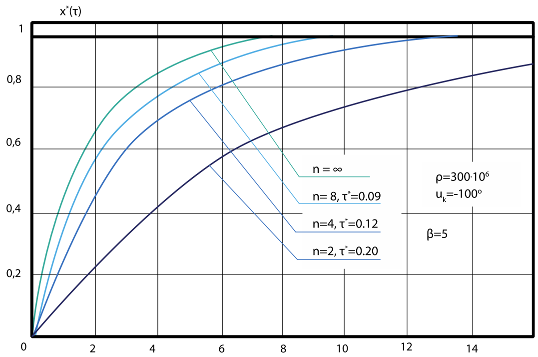


Рис.7. Зависимость времени практического достижения стационарного состояния от β и скрытой теплоты кристаллизации

Получена формула для определения временного интервала, в течении которого биологическая ткань в точке $z < z_n$ находится в интервале эвтектичности температуры $\Theta_n < \Theta < \Theta^*/U_n < U < U^*/$

$$\Delta\tau = F\left(\frac{x - f(\Theta_n)}{1 + hf(\Theta_n)}\right) - F(x), \qquad (25)$$

где функция $F(x^*)$, определяется согласно полученным приближенным аналитическим решениям, а $f(\Theta_n) = (\Theta - \Theta^*)[h(1 + \Theta^*)]^{-1}$.

Таким образом, получены одномерные математические модели низкотемпературного воздействия на биоткани с учётом их особенностей и методов решения.

Введены определения обобщенного решения, субрешения и суперрешения задач со свободными границами.

Вопрос существования и единственности обобщенного решения рассмотрен для следующей задачи типа Стефана со свободной границей:

$$\begin{gathered}
\left(\frac{1}{x_u}\right)_u = k(u)\frac{\partial x}{\partial t} - f(u)\frac{\partial x}{\partial u}, \quad 0 < u < \bar{u}(t), \quad t > 0, \\
x(u,0) = x_0(u), \quad 0 < u < \bar{u}(0); \quad (\bar{u}(0) = 0), \qquad (26) \\
\frac{1}{x_u} = \alpha(u - u_c(t)), \quad u = \bar{u}(t), \\
\frac{1}{x_u} = 0, \quad u = 0; \quad x(\bar{u}(t),t) = 0,
\end{gathered}$$

где $k(u)$, $f(u)$ - заданные функции, терпящие разрыв первого рода, т.е.

$$k(u) = \begin{cases} 1, 0 \le u < 1, \\ k, 1 < u \le \bar{u}, \end{cases} \qquad f(u) = \begin{cases} f(u), 0 \le u < 1, \\ 0, 1 < u \le \bar{u}, \end{cases}$$

α - известный параметр (коэффициент теплообмена), $u_c(t)$, $x_0(u)$ - заданные функции. Искомыми являются функции $x = x(u,t)$, $u = \bar{u}(t)$.

Получена вариационная постановка задачи:

$$\int_0^{\bar{u}} v(u,t)[k(u)x_t - f(u)x_u]\, du - \bar{v}(\bar{u},t)\alpha[u - u_c(t)] + \int_0^{\bar{u}} \frac{1}{x_u} v_u(u,t) du = 0,$$

$$x(u,0) = x_0(u); \quad x(\overline{u},t) = 0, \quad x_0(0) = 0. \qquad (27)$$

где $v(u,t)$ - произвольная функция из $W_2^1((0,T)x\Omega)$, $\Omega = \{u : 0 < u < \overline{u}(t), t > 0\}$.

Проинтегрировав по области *(0,T)* и выполнив еще раз интегрирование по частям, с учетом начального условия, получено соотношение:

$$\int_0^1 v(u,0)x_0(u)du + \int_0^1 \int_0^T \left(x\frac{\partial v}{\partial t} - x\frac{\partial v}{\partial u} f(u) + v\frac{\partial f(u)}{\partial u} x - \frac{1}{x_u}\frac{\partial v}{\partial u} \right) dtdu +$$

$$+k \int_0^{\overline{u}} \int_0^T \left(x\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{x_u}\frac{\partial v}{\partial u} \right) dtdu + k\int_1^{\overline{u}} v(u,0)x_0\,(u)du + \int_0^T \alpha v(\overline{u},t)\left(\overline{u} - u_c(t)\right)dt = 0 \quad (28)$$

$$x(\overline{u},t) = 0.$$

Для стационарной задачи, соответствующей (26) найдено точное аналитическое решение, размеры замороженной и возмущенной биологической ткани. Полагая, *v=1*, найдены приближенное решение нестационарной задачи.

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 4. Задача (26) имеет единственное обобщенное решение, если $\alpha \to \infty$ и $\overline{u}(t) = \overline{u} = const$.

Теорема 5. Пусть $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ - неотрицательные классические решения (26), причем $x^{(2)}(u,0) \geq x^{(1)}(u,0)$, $u \in \Omega$, $\Omega = \{u: 0 < u < \overline{u}(t)$, $x^{(2)}(u,t) \geq x^{(1)}(u,t)$, $t \in [0;T], u \in \partial\Omega$. Тогда $x^{(2)}(u,t) \geq x^{(1)}(u,t)$, в $[0;T]x\Omega$.

Теорема 6 (сравнения). Пусть $x(u,t)$ - обобщенное решение задачи (26), $x_1(u,t)$ - обобщенное субрешение. Если предположим, что $x_1(u,t) \leq x_0(u)$, то $x_1(u,t) \leq x(u,t)$.

Теорема 7. Решение задачи (26) существует, и справедлива оценка:

$$\|x_n\|^2_{L^2(0,\overline{u})} = \frac{\overline{u}}{\tilde{f}}\left(2\exp\left(1 - \frac{\tilde{f}}{\tilde{k}}t\right) - 1\right). \qquad (29)$$

В главе 3 приводится доказательство лемм 1,2 и теорем 1-7.

Четвертая глава содержит построение и исследование двумерных математических моделей, возникающих при моделировании низкотемпературного воздействия на биологические ткани.

Локальность процесса замораживания позволяет рассматривать биологическую ткань как полуограниченную, активную (неинертную) теплопроводящую среду *z>0*. Если при деструкции применяются криозонды с достаточно протяженной вдоль оси *Ox* охлаждающей поверхностью, то, пренебрегая краевыми эффектами, можно считать, что температурное поле биологической ткани зависит только от двух пространственных переменных *y* и *z*, т.е *T=T(y,z,t).*

Изотермические поверхности замораживания для такого случая можно представить в одном из видов:

$$\Phi^*(y,z,t) = y - Y^*(z,t) = 0; \; \Phi^*(y,z,t) = z - Z^*(y,t) = 0. \qquad (30)$$

Для орта нормали $\vec{n}$ к $\Phi^*(y,z,t)=0$ и для производной по нормали получаются:

$$\vec{n}=\frac{grad\Phi^*}{|grad\Phi^*|}=\frac{\vec{j}-Y_z^*(z,t)\vec{k}}{\sqrt{1+Y_z^{*2}(z,t)}};\ \ \vec{n}=\frac{grad\Phi^*}{|grad\Phi^*|}=\frac{-Z_y^*(y,t)\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{1+Z_y^{*2}(y,t)}}. \tag{31}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n}=(gradT,\vec{n})=\frac{T_y-T_zY_z^*(z,t)}{\sqrt{1+Y_z^{*2}(z,t)}};\ \ \frac{\partial T}{\partial n}=(gradT,\vec{n})=\frac{-Z_y^*(y,t)+T_z}{\sqrt{1+Z_y^{*2}(y,t)}}. \tag{32}$$

Условия сопряжения и условия Стефана имеют вид:

$$[\lambda(T)T_y]_{\Phi^*}-[\lambda(T)T_z]_{\Phi^*}Y_z^*(z,t)=p\,Y_z^*(z,t),\ \mathrm{y}=Y_z^*(z,t), \tag{33}$$

$$[\lambda(T)T_z]_{\Phi^*}-\left[\lambda(T)T_y\right]_{\Phi^*}Z_y^*(y,t)=p\,Z_y^*(y,t),\ \mathrm{z}=Z_y^*(y,t). \tag{34}$$

$$T_y-T_z(y,z,t)=0,\ y=y(z,t);\ \ T_z-T_y(y,z,t)=0,\ z=z(y,t). \tag{35}$$

$$[\lambda(T)T_y]_{\text{п}}-[\lambda(T)T_z]_{\text{п}^*}y_z^*(z,t)=p_0\ y_z^*(z,t),\ \mathrm{y}=y_z^*(z,t), \tag{36}$$

$$[\lambda(T)T_z]_{\text{п}}-\left[\lambda(T)T_y\right]_{\text{п}^*}z_y^*(y,t)=\ p_0z_y^*(y,t),\ \mathrm{z}=z_y^*(y,t). \tag{37}$$

Уравнения, описывающие тепловые процессы имеют вид:

$$\begin{gathered}\Delta T-\frac{1}{a^2}\frac{dT}{dt}=0, T<T_n\ (\Phi_n(y,z,t)<0),\\ \Delta T-\frac{1}{a^2}\frac{dT}{dt}=\frac{-w(T)}{\underline{\lambda}}, T_n<T<T^*\ (\Phi^*(y,z,t)<0),\\ \Delta T-\frac{1}{a^2}\frac{dT}{dt}=\frac{-w(T)}{\overline{\lambda}}, T^*<T<\overline{T}\ (\Phi_{\text{в}}(y,z,t)<0).\end{gathered} \tag{38}$$

Рассмотрены более упрощенные постановки данных задач. В случае, когда используется плоский круговой аппликатор получается двухфазная задача Стефана для определения искомой функции $T=T(r,z,t)$, поверхность раздела фаз и $\Phi^*(r,z,t)=z-z^*(r,t)=r-R^*(z,t)=0,\ r>0,\ t>0$

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}-\frac{1}{\underline{a}^2}\frac{\partial T}{\partial t}=0,\ \Phi^*(r,z,t)<0,\ t>0,\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}-\frac{1}{\overline{a}^2}\frac{\partial T}{\partial t}=-\frac{1}{\overline{\lambda}}w(T),\ \Phi^*(r,z,t)>0,\ t>0,\\ T(r,z,0)=\overline{T},\ \ r>0,\ \ z>0,\\ \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}-\alpha(r)[T-T_c(r)]=0,\ z=0,\ r>0,\ t>0.\end{gathered} \tag{39}$$

Если охлаждающая поверхность цилиндрической формы, для определения искомой функции и следующих поверхностей

$$\begin{gathered}\Phi_{\text{п}}=r-R^*(\varphi,t)=\varphi-\Phi^{\text{п}}(r,\varphi)=0,\\ \Phi^*(r,\varphi,t)=r-R^*(\varphi,t),\\ \Phi_{\text{в}}(r,\varphi,t)=r-R^{\text{в}}(\varphi,t)=\varphi-\Phi^{\text{в}}(r,t)=0.\end{gathered} \tag{40}$$

получена нестационарная пространственно–локализованная задача Стефана:

$$\begin{gathered}\Delta T-\frac{1}{\underline{a}^2}T_t=0,\quad \Phi_n(r,\phi,t)<0,\\ \Delta T-\frac{1}{\underline{a}^2}T_t=\frac{-w(T)}{\underline{\lambda}},\quad \Phi*(r,\phi,t)<0,\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
\Delta T - \frac{1}{\overline{a}^2} T_t = \frac{w(T)}{\overline{\lambda}}, \quad \Phi_B(r,\phi,t) < 0, \\
\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}, \\
\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r} - \alpha_A(T - T_A) = 0, \quad r = r_0, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\
\lambda(T)\frac{\partial T}{r\partial \phi} - \alpha_c(T - T_c) = 0, \quad \phi = 0, \quad r_0 < r < R^B(0,t), \quad t > 0, \\
\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0, \quad \phi = \frac{\pi}{2}, \quad r_0 < r < R^B\left(\frac{\pi}{2}, t\right), \quad T = \overline{T}, \quad r \ge R^B(0,t), \quad t > 0, \\
[\lambda(T)T_r]_n - [\lambda(T)T_\phi]_n \frac{R^n_\phi}{r^2} = -pR^n_t, \quad r = R^n(\phi,t), \\
[\lambda(T)T_r]_n \Phi^n_r + \frac{[\lambda(T)T_\phi]_n}{r^2} = -pR^n_t, \quad \phi = \Phi^n(r,t), \quad [T]_n = 0, \\
[\lambda(T)T_r]_\phi - [\lambda(T)T_\phi]_n R^n_\phi = -pR^\phi_t, \quad r = R^\phi(\phi,t), \\
[\lambda(T)T_\gamma]_\phi \Phi^*_r + \frac{[\lambda(T)T_\phi]_n}{r^2} = -p\Phi^n_t, \quad \phi = \Phi^n(r,t), \quad [T]_\phi = 0, \\
T_r - T_\phi \frac{R^B_\phi}{r^2} = 0, \quad r = R^B(\phi,t), \quad T_r \Phi^B_r - \frac{T_\phi}{r^2} = 0, \quad \phi = \Phi^B(r,t).
\end{gathered} \tag{41}
$$

При $t \to \infty$ получены более простые постановки стационарной задачи Стефана.

При воздействии низких температур с использованием плоского кругового криозонда задача сводится к определению температурного распределения $T = T(r,z,t)$ и соответствующих изотерм:

$$
\begin{gathered}
\Delta T - \frac{1}{\underline{a}^2}\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \Phi_n(r,z,t) < 0, \\
\Delta T - \frac{1}{\underline{a}^2}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{w(T)}{\underline{\lambda}}, \Phi^*(r,z,t) < 0, \\
\Delta T - \frac{1}{\overline{a}^2}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{w(T)}{\underline{\lambda}}, \Phi_{\text{в}}(r,z,t) < 0, \\
\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \\
\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z} - \alpha[T - T_c(r)] = 0, z = 0, 0 < r < R^{\text{в}}(0,t), t > 0, \\
\frac{\partial T}{\partial r} = 0, r = 0, 0 < z < z^{\text{в}}(r,t), T = \overline{T}, z > z^{\text{в}}(r,t), t > 0, \\
\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right]_n - \left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right]_n z^n_r = -pz^n_t, z = z^n(r,t), \\
\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right]_n - \left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right]_n R^n_z = -pR^n_t, r = R^n(r,t), [T]_n = 0, \\
\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right]_* - \left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right]_* z^*_r = -pz^n_t, z = z^*(r,t), \\
\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right]_* - \left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right]_* R^*_z = -pR^*_t, r = R^*(r,t), [T]_* = 0,
\end{gathered} \tag{42}
$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial r} z_r^{в} = 0, z = z^{в}(r,t), \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial T}{\partial z} R_z^{в} = 0, r = R^{в}(z,t), t > 0.$$

Получена следующая нестационарная задача в случае, когда используется криозонд полусферической формы

$$\Delta T - \frac{1}{\underline{a}^2}\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \Phi_n(r,\Theta,t) < 0,$$
$$\Delta T - \frac{1}{\underline{a}^2}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{w(T)}{\underline{\lambda}}, \Phi^*(r,\Theta,t) < 0,$$
$$\Delta T - \frac{1}{\overline{a}^2}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{w(T)}{\underline{\lambda}}, \Phi_{в}(r,\Theta,t) < 0,$$
$$\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(sin\Theta\frac{\partial T}{\partial\Theta}\right),$$
$$\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r} - \alpha_A[T - T_A(r)] = 0, r = r_0, 0 < \Theta < \frac{\pi}{2}, \tag{43}$$
$$\frac{\partial T}{\partial\Theta} = 0, \Theta = 0, r_0 < r < R^{в}(0,t),$$
$$\lambda(T)\frac{\partial T}{r\partial\Theta} + \alpha_c[T - T_c(r)] = 0, \Theta = \frac{\pi}{2}, r_0 < r < R^{в}\left(\frac{\pi}{2}, t\right),$$
$$T = \overline{T}, r = R^{в}(\Theta,t),$$
$$\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right]_n - \left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial\Theta}\right]_n \frac{R_\Theta^n}{r^2} = -pR_t^n, r = R^n(\Theta,t),$$
$$\frac{1}{r^2}\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial\Theta}\right]_n - \left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial \mathrm{r}}\right]_n \Theta_r^n = -p\Theta_t^n, \Theta = \Theta^n(\mathrm{r},t), [T]_n = 0,$$
$$\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right]_* - \left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial\Theta}\right]_* \frac{R_\Theta^*}{r^2} = -pR_t^*, r = R^*(\Theta,t),$$
$$\frac{\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial\Theta}\right]_*}{r^2} - \left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial \mathrm{r}}\right]_* \Theta_r^* = -p\Theta_t^*, \Theta = \Theta^*(\mathrm{r},t), [T]_* = 0,$$
$$\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial T}{\partial\Theta}\frac{R_\Theta^{в}}{r^2} = 0, r = R^{в}(\Theta,t), \frac{\partial T}{\partial\Theta}\frac{1}{r^2} - \frac{\partial T}{\partial r}\Theta_r^{в} = 0, \Theta = \Theta^{в}(r,t).$$

Задачи (42), (43) приведены к каноническому виду. Приведены более простые постановки соответствующие (43), (44) стационарные задачи Стефана в цилиндрических и сферических координатах.

При низкотемпературном воздействии на биоткани температура может быть выражена расходящимся рядом, поэтому целесообразно использовать асимптотическое интегрирование для дальнейшего анализа двумерной нестационарной задачи Стефана:

$$\Delta u - k(u)u_t = f(u), \quad y_0 < y < y_1(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$u(y,x,0) = 0, \quad y = y_0, \quad 0 < x < 1; \quad (y_1(x,0) = y_0),$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = H(p)[v(u) - v_c], \quad x = 0, \quad y_0 < y < y_1(x,t), \quad t > 0, \tag{44}$$
$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x = 1, \quad y_0 < y < y_1(x,t), \quad t > 0,$$

$$[u] = 0, \quad y = y*, \quad [\frac{\partial u}{\partial n}]_{y=y*} = p\frac{y_t^*}{|grady*|}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

где $\Delta u = y^{-2}\frac{\partial(y^2 u_y)}{\partial y} + y^{-2}\frac{\partial((1-x^2)u_x)}{\partial x}$ представляет собой осесимметричную компоненту оператора Лапласа, записанную в сферических координатах $y, \varphi, \Theta = arccosx$.

Выполнено асимптотическое интегрирование двумерных осесимметричных стационарных и нестационарных задач криодеструкции.

После асимптотического разложения при $\varepsilon(y) \le 1$:

$$u = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k u_k, \varepsilon = \varepsilon(y) \le 1, u_k = u_k(x,y), N \ge 1, \tag{45}$$

уравнение нулевого приближения u_0 имеет вид:

$$Lu_0 = y^{-2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) + y^{-2}[(1-x^2)\frac{\partial u_0}{\partial x}]_x + f(u_0) = 0, \underline{y} < y < \overline{y}, 0 < x < 1,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = h[u_0 - u_A], \qquad y = \underline{y}, \tag{46}$$

$$y^{-1}\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, x = 0, u_0 < \infty, x = 1, \underline{y} < y < \overline{y}.$$

Предварительно разложив функцию $f(u_0 + \varepsilon u_1)$ в ряд Тейлора и собирая коэффициенты при ε, для определения $u_1(x,y)$ получена краевая задача:

$$L_1 u_1 = y^{-1}\left(y^2 u_{1y}\right)_y + y^{-2}[(1-x^2)u_{1x}]_x -$$

$$-u_1\eta(u_0) + f(u_0)u_1 = 0, \underline{y} < y < \overline{y}, 0 < x < 1,$$

$$u_{1y} = hu_1, y = \underline{y}, u_1 = 0, y = \overline{y}, 0 < x < 1, \tag{47}$$

$$y^{-1}u_{1x} = \gamma(u_c) - \gamma u_0, x = 0,$$

$$u_0(y^*) = 0, \delta\left(u_0(y)\right) = \frac{\delta(y-y^*)}{u_0(y^*)} = \frac{y\delta(y-y^*)}{1+y^*}.$$

В каждой из подобластей биологической ткани $y<y*$ и $y>y*$ получены уравнения:

$$y^{-1}\left(y^2 u_{1y}\right)_y + y^{-2}[(1-x^2)u_{1x}]_x - f(u_0)\varepsilon u_1 = 0, y^* < y < \overline{y}, \tag{48}$$

$$y^{-1}\left(y^2 u_{1y}\right)_y + y^{-2}[(1-x^2)u_{1x}]_x = 0, \underline{y} < y < y^*, \tag{49}$$

с краевыми условиями

$$y^{-1}u_{1y} = \gamma(u_c) - u_0, x = 0, \underline{y} < y < y^* \tag{50}$$

и условиями сопряжения при $y=y*$

$$[u_1]_{y^*} = 0, \left[u_{1y}\right]_{y^*} = \frac{y^* u_1(x,y^*)}{1+y^*}, 0 < x < 1, \tag{51}$$

где $\gamma(u_c) = u_c + (\gamma u_c - u_c)\eta(u_c)$.

В частном случае $\beta = 0$, когда $f(u) = u^\beta = 1$, имеет место вторая формула Грина:

$$\int_0^1 \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} (\varphi L_1 u - u L_1 \varphi) y^2 dy dx =$$

$$= \int_0^1 \overline{y}^2 (\varphi u_y - u \varphi_y)\big|_{y=y-y^2[\varphi(u_y - h\overline{u}) - u(\varphi_y - h\varphi)]} dx - \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} (\varphi u_x - u\varphi_x)|_{x=0}\, dy. \qquad (52)$$

Функция Грина найдена в виде ряда Фурье по четным полиномам Лежандра первого рода $P_{2n}(x)$

$$G(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{2n}(\xi) P_{2n}(x)}{\|P_{2n}(x)\|^2} g_n(y, \eta) \qquad (53)$$

Многие исследования посвящены биофизическим параметрам человеческих тканей, однако недостаточно работ, изучающих температурное распределение в многослойном эпидермисе при криогенном воздействии. В **пятой главе** представлены методы идентификации теплофизических параметров многослойной биоткани при низкотемпературном воздействии.

Кожа состоит из трёх слоёв: эпидермиса, дермы и гиподермы. Для эпидермиса при низкотемпературном воздействии построена математическая модель коэффициентов теплопроводности многослойной среды:

$$\lambda_j = \frac{(Q_j^{k+1} - Q_j^k) V_j \Delta x_j R_j V_{j+1} \Delta x_{j+1}}{(Q_{j+1}^{k+1} V_j \Delta x_j - Q_j^k V_{j+1} \Delta x_{j+1}) M}, \qquad (54)$$

$$\lambda_j = \frac{R_j (Q_{j+1}^{k+1} - Q_{j+1} k) V_j \Delta x_j V_{j+1} \Delta x_{j+1}}{M (Q_j^k V_{j+1} \Delta x_{j+1} - Q_{j+1}^k V_j \Delta x_j)}. \qquad (55)$$

где $R_j = c_j \rho_j$, $M = S\Delta t$, $Q = \{q_j\}$, $j = 1,2,...,m$ - значения количества теплоты (холода) в каждом слое эпидермиса биологической ткани, m – общее число слоев эпидермиса биологической ткани, j – номер слоя, Δt - промежуток времени перехода передачи количества теплоты (холода) из k-го слоя в $k+1$ слой, $t_i = i \cdot \Delta t$, где i – целочисленные моменты условного времени, $Q^{k+1} = PQ^k$, P- матрица переходных вероятностей, элементы которой p_{ij} показывают вероятность перехода количества теплоты (холода) из i-й ячейки в j-ую ячейку слоя биологической ткани, λ_j - коэффициент теплопроводности, S_j – площадь поверхности ячейки биологической ткани, V_j - объем ячейки биологической ткани, c_j теплоемкость слоя биологической ткани, ρ_j - плотность слоя биологической ткани, h_j - толщина j-ой ячейки слоя, $j = 1,2,\dots,m$.

Анализ корректности модели основан на принципе сохранения общего количества вещества или параметра во всех слоях биоткани. Значения коэффициентов теплопроводности зависят от толщины слоя, теплоёмкости, плотности и температуры ткани, увеличиваясь с толщиной слоя, что требует снижения температуры воздействия на более глубокие слои.

Для улучшения эффективности математического моделирования предложен метод, основанный на использовании комплексных статусных функций, выдвинутый В.С. Пугачевым, где случайная функция, над которой нужно произвести те или иные преобразования, представлено в виде суммы элементарных случайных функций, называемое каноническим разложением.

Каноническим разложением действительной случайной функции *X(t)* называется ее представление в виде

$$X(t) = m_x + \sum_{k=1}^{n} V_k \varphi_k(t), \tag{56}$$

где $\varphi_k(t)$ (k=*1,2,…,n*) - неслучайные действительные, «координатные» функции, V_k (k =*1,2,…,n*) – центрированные, попарно некоррелированные случайные величины с дисперсиями D_k (k=*1,2,…,n*).

При низкотемпературном воздействии на многослойный эпидермис происходит фазовый переход с подавлением некоторых теплофизических свойств и появлением шумов, вызванных случайными факторами, что изменяет физические характеристики ткани.

Для устранения искажений и шума вводят значимые параметры, которые позволяют рассчитывать средние значения и прогнозировать состояние системы. Для математического моделирования мы берем базовые детерминированные случайные функции в виде:

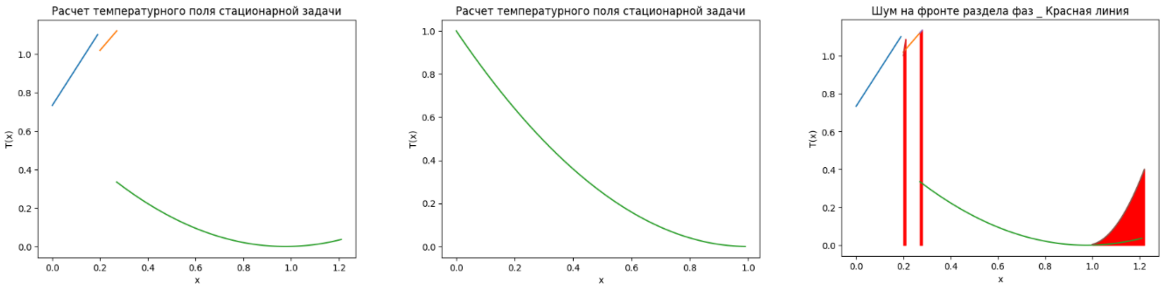
$$\psi_{lk}(t) = \varphi_l(t) e^{i2\pi kt}, \tag{57}$$

где $\varphi_l(t)$ – модули комплексных функций шума, t – введенная базовая переменная, аналог координаты времени, k =-1,0,1 - фазовые множители для введенных функций. Фазовые коэффициенты выбираются так, чтобы сохранить ортогональность по скалярному произведению:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(t) \psi_j^*(t)\, dt = \delta_{ij}. \tag{58}$$

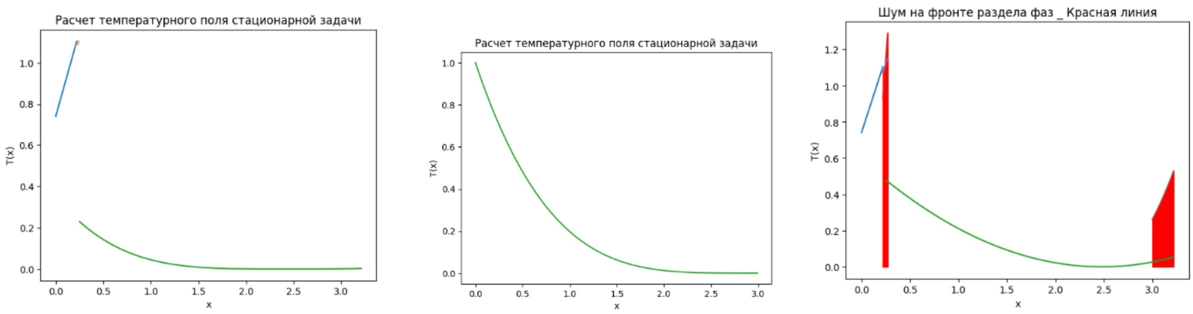
Символ * в (58) обозначает комплексное сопряжение, δ_{ij} – символ

Проведены расчеты. Результаты расчета представлены на рис.8 и 9.



a) Температура без шума *b*) Температура с шумом *c*) Фронт раздела фаз (красная область)

Рис.8. Динамика температурного поля с шумом и фронт раздела фаз (β = 0)



a) Температура без шума *b)* Температура с шумом *c)* Фронт раздела фаз (красная область)

Рис.9. Динамика температурного поля с шумом и фронт раздела фаз ($\beta = 0{,}5$)

Как видно из рис.8 при $\beta = 0$ температурное поле сначала растет, после перехода границы раздела фаз начинает убывать, затем некоторое время становится равным нулю, затем опять начинает увеличиваться. В данном случае область биоткани разбивается на три области, возникают две границы раздела фаз. При $\beta = 0{,}5$ ведет себя аналогично, но область биоткани разбивается на две подобласти и активна только одна граница раздела фаз.

Анализ показал, что применение статусных функций для снижения шума при низкотемпературных воздействиях повышает точность диагностики, эффективность лечения и способствует развитию биологических исследований.

Для фильтрации шума использованы: скользящее среднее, медианный фильтр, фильтр Калмана, методы машинного обучения.

Применяя скользящее среднее к данным составлены ряды для температуры из простых средних арифметических значений, для промежутков длиной 2,3,4,5. Сравнительный анализ, показал, что чем промежуток больше, тем возникает больше шума.

Погрешность при применении медианного фильтра носит неустойчивый характер, что не совсем подходит для низкотемпературного воздействия на живые биологические ткани.

Результаты расчета с применением фильтра Калмана показали, что коэффициент Калмана равен 0,500003, что означает, что датчик не совсем точный, и не совсем плохой.

Используя метод наименьших квадратов, аппроксимированы данные линейной, степенной и квадратичной зависимостями и выяснили, какая из трех зависимостей лучше выравнивает данные.

В диссертационной работе проведен сравнительный анализ адаптированных методов фильтрации шума при низкотемпературном воздействии на эпидермис биоткани на границе раздела фаз по эффективности, по ограничениям, по вычислительным затратам, по применимости.

Методы скользящего среднего и медианный фильтр обеспечивают умеренную эффективность. Фильтр Калмана требует модель процесса, а алгоритмы машинного обучения - большого объёма данных и показывают высокую эффективность.

Фильтр Калмана и методы машинного обучения требуют заметно больше вычислительных ресурсов, скользящее среднее и медианный фильтр обходятся минимальными затратами на обработку данных.

Метод скользящего среднего снижает высокочастотные шумы, медианный фильтр удаляет выбросы, фильтр Калмана подавляет динамические шумы при наличии модели, а при большом объёме данных для сложных шумов эффективны методы машинного обучения.

Оптимизация фильтрации шума с комплексными статусными функциями впервые применена к задачам фазовых переходов при низкотемпературном воздействии, повышая точность диагностики и лечения, а также расширяя возможности биологических исследований. Предложен метод обработки и интерпретации данных с учётом взаимовлияния процессов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В работе решена научная проблема разработки новых математических моделей фазовых переходов в биоткани при низкотемпературном воздействии. Созданы конструктивные методы решения возникающих краевых задач, эффективные численные алгоритмы и удобные программные продукты на их основе.

Созданы модели и методы математического моделирования низкотемпературного воздействия на биологические ткани. Построены одномерные и двумерные математические модели низкотемпературного воздействия на биологические ткани в виде задачи с фазовыми переходами. Разработаны конструктивные методы решения одномерных и двумерных моделей.

Построена математическая модель в виде матрицы коэффициентов теплопроводности для многослойной среды эпидермиса биоткани при низкотемпературном воздействии. Доказано, что значение коэффициента теплопроводности зависит от толщины слоя биологической ткани, теплоемкости, плотности, температуры биологической ткани. Сформирована гипотеза о возможности построения модели фильтрации шума на основе метода статусных функций.

Разработаны концепция и комплексы проблемно-ориентированных программ для применения в биомедицине. Проведены проверки адекватности математических моделей на основе проведенных вычислительных экспериментов.

Введены новые терминологии: матрица коэффициентов теплопроводности для эпидермиса при низких температурах; метод статусных функций для моделирования и анализа задач с фазовыми переходами; алгоритм интерпретации и преобразования данных с использованием статусных функций.

Разработана методика применения к математическим моделям методов решения дифференциальных и интегральных уравнений, численно-аналитических методов, методов квазилинеаризации. Для алгоритма интерпретации и преобразования данных на основе статусных функций применены модифицированные численные методы, канонические разложения случайных функций. К моделям адаптированы методы квазилинеаризации, локально-одномерный метод, первый и второй методы Лейбензона, метод интегральных уравнений, численно-аналитический метод Ротэ, методы дифференциальных уравнений, метод Фаэдо-Галёркина, метод нелинейных вариационных параметров, численные методы решения алгебраических нелинейных уравнений, систем нелинейных уравнений, численные методы решения задачи Коши, методы теории вероятностей. Проведено асимптотическое интегрирование двумерных осесимметричных стационарных и нестационарных задач криодеструкции биоткани.

Предложен способ перехода от задачи определения температурного поля к задаче определения поля изотерм. Получены условия существования, единственности, монотонности, пространственной локализации решений задач со свободными границами для поля изотерм, а также условия существования, единственности обобщенного решения начально-краевой задачи типа Стефана со свободной границей.

Проведен сравнительный анализ методов фильтрации шума на границе раздела фаз при низкотемпературном воздействии на эпидермис биоткани с точки зрения их эффективности, ограничений, вычислительных затрат и практической применимости.

В рамках диссертационного исследования разработаны новые методы математического моделирования низкотемпературного воздействия на биоткани и усовершенствованы численные методы для создания специализированных программных комплексов. Отличительной чертой решенных задач является реализация связи биологической ткани человека с воздействующим на него системой.

Полученные результаты диссертационной работы: могут внести вклад в изучение фундаментальных процессов, лежащих в основе низкотемпературного воздействия на биоткани; помогут улучшить понимание физиологических процессов медицинских процедур; помогут при проверке существующих теорий и выдвижении новых гипотез влияния низкотемпературного воздействия на биоткани; будут способствовать новым открытиям в области криобиологии и смежных областей; помогут создать универсальные подходы при прогнозировании и оптимизации лечебных процедур; помогут повысить безопасность и эффективность процессов криоохлаждения биологических тканей in vivo.

Разработанные модели носят специфический характер и изначально ориентированы на задачи с строго заданными априорными ограничениями - фиксированной геометрией, определенными граничными условиями и требованием гладкости исходных данных. Такой подход обеспечивает корректность постановки и аналитическую строгость решений при моделировании процессов фазовых переходов. Вместе с тем, полученные результаты обладают потенциалом обобщения и могут быть адаптированы к новым классам задач с иными физическими параметрами и объектами моделирования, включая инженерные и прикладные системы, где допускаются более общие или приближенные условия.

Автор выражает глубокую благодарность Александру Афанасьевичу Большакову, доктору технических наук, профессору Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Ирине Владимировне Вешневой доктору технических наук, профессору Саратовского национального исследовательского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского за внимание, поддержку и ценные советы.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в журналах, включённые в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных научных результатов диссертаций по специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

1. Кудаева Ф.Х. Математическая модель низкотемпературного воздействия на биоткани/Математическая физика и компьютерное моделирование. т.28. №2. 2025. - С.27-39 DOI: https://doi.org/10.15688/ mpcm.jvolsu.2025.2.3 *(Категория К2, Math-Net.Ru – приравнивается К1)*
2. Кудаева Ф.Х. Сравнительный анализ методов фильтрации шума при низкотемпературном воздействии на биоткани/Математическая физика и компьютерные технологии. т. 28 №3.

2025. – С.50-66 DOI: https:/ /doi.org/ 10.15688/ mpcm.jvolsu.2025.3.5 *(Категория К2, Math-Net.Ru – приравнивается К1)*

3. Кудаева Ф.Х. Метод интегральных уравнений для задачи Стефана при низкотемпературном воздействии на биоткани //Программная инженерия. 2025 Том 16, № .5. С. 252-259.DOI: 10.17587/prin.16.252-259 *(Категория К1)*
4. Кудаева Ф.Х. Математическая модель низкотемпературного воздействия на биоткани/ Прикладная математика & физика. 2025. - 57(2). – С. 117-124 DOI: 10.52575/2687-0959-2025-57-2-117-124 EDN LEREVY *(Категория К2, Math-Net.Ru – приравнивается К1)*
5. Кудаева Ф.Х. Методы решения задач с фазовыми переходами при низкотемпературном воздействии на биоткани//Прикладная математика & физика. 2025. - 57(3). – С. 248-255 DOI: 10.52575/2687-0959-2025-57-3-248-255 EDN *(Категория К2, Math-Net.Ru – приравнивается К1)*
6. Кудаева Ф.Х., Вешнева И.В. Задачи со свободными границами для изотермических поверхностей в медицине/Южно-Сибирский научный вестник. 2024. № 5 (57). С. 123-128 DOI: 10.25699/SSSB.2024.57.5.016 *(Категория К2)*
7. Кудаева Ф.Х. Метод статусных функций при математическом моделировании фазовых переходов/ Южно-Сибирский научный вестник. 2024. № 5 (57). С. 103-108 DOI:10.25699/SSSB.2024.57.5.019 *(Категория К2)*
8. Кудаева Ф.Х. Канонический вид задач со свободными границами в проблемах медицины. Южно-Сибирский научный вестник. 2023. № 5 (51). С. 142-147. DOI: 10.25699/SSSB.2023.51.5.019*(Категория К2)*
9. Кудаева Ф.Х., Кайгермазов А.А. Хашхожева Д.А Задача со свободными границами в медицине //Южно-Сибирский научный вестник. 2022. № 6 (46). С. 8–12.DOI: 10.25699/SSSB.2022.46.6.050 *(Категория К2)*
10. Кудаева Ф.Х., Кайгермазов А.А. Кармоков М.М. Есанкулова М.Х. Двумерные задачи со свободными границами в проблемах медицины // Южно-Сибирский научный вестник. 2022. № 2(42). С. 36–40. DOI: 10.25699/SSSB.2022.42.2.015 *(Категория К2)*
11. Кудаева Ф.Х., Кайгермазов А.А., Хашхожева Д.А., Жемухов А.Х., Балкарова С.Б., Этезова М.Б. Информационно-коммуникационные технологии при исследовании задач со свободными границами // Южно-Сибирский научный вестник. 2019. № 3 (23). С. 67–72. DOI: 10.25699/SSSB.2019.27.37221 *(Категория К2)*
12. Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х. Двумерные задачи со свободными границами в медицине // Южно-Сибирский научный вестник. 2014. №3 (7). С.16–18 *(Категория К2)*

Публикация в журналах, индексируемых в международных базах Web of Science, Scopus и приравниваемые к изданиям из Перечня ВАК

1. Kudayeva F.Kh. Asymptotic integration of two-dimensional free boundary Problems in Medicine/Computational mathematics and modeling/Springer/2025, pp.1-17 https://doi.org/10.1007/s10598-025-09634-y *(Квартиль Q4)*
2. Vechneva I.V., Kudayeva F.Kh., Bechelova A.R. Tasks with free boundaries for Isothermal surfaces with low-temperature Effect on biological Tissues/ Computational mathematics and modeling/Springer/2025, pp.1-16 https://doi.org/10.1007/s10598-025-09637-9 *(Квартиль Q4)*
3. Kudayeva F.Kh. Comparative Analysis of noise Filtering Methods under Low-Temperature Exposure on biological Tissue/Computational mathematics and modeling/Springer/2025, pp.1-14 https://doi.org/10.1007/s10598-025-09619-x *(Квартиль Q4)*
4. Kudayeva F.Kh., Kaygermazov A.A., Edgulova E.K., Bechelova A.R., Tchabisimova M.M. Heat Potentials Method in the Treatment of One-dimensional Free Boundary Problems Applied in Cryomedicin // Journal of the Indian Mathematical Society. 2018. Vol. .85. Iss. 1-2. Pp. 111–121. DOI: 10.18311/jims/2018/18900 *(Квартиль Q4)*

Монографии

1. Кудаева Ф.Х. Математические модели применения задач со свободными границами в биомедицине: Монография/Министерство науки и высшего образования Российской

Федерации, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова. Нальчик: Принт-Центр, 2024. – 380с.

2. Кудаева Ф.Х. Математическое моделирование теплопроводности в многослойной среде биоткани: Монография/Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова. Нальчик: Принт-Центр, 2024. – 244с.

Свидетельства на программы для ЭВМ

1. Кудаева Ф.Х. Компьютерное моделирование низкотемпературного воздействия на биологические ткани в криохирургии. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2023663248, 21.06.2023. Заявка № 2023661888 от 08.06.2023.
2. Кудаева Ф.Х. Компьютерное моделирование низкотемпературного воздействия на биологические ткани сферическим аппликатором. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2023663249, 21.06.2023. Заявка № 2023661899 от 08.06.2023.
3. Кудаева Ф.Х. Компьютерное моделирование низкотемпературного в гипотермии. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2023661895, 08.06.2023. Заявка № 2023661895 от 08.06.2023.
4. Кудаева Ф.Х. Компьютерное моделирование гипотермии и криодеструкция биологической ткани в медицине. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2023663248, 21.11.2023. Заявка от18.11.2023.
5. Кудаева Ф.Х. Плоско-параллельная гипотермия и криодеструкция биологической ткани в медицине. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2023685979, 01.12.2023. Заявка от18.11.2023.
6. Кудаева Ф.Х. Сферически-симметричная гипотермия и криодеструкция биологической ткани в медицине. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2023687262, 13.12.2023. Заявка от18.11.2023.

С остальными работами, опубликованными в рецензируемых научных журналах ВАК РФ, в межвузовских сборниках, сборниках трудов международных, российских и региональных конференций, международных форумах и в официальных изданиях можно ознакомиться по ссылкам:

РИНЦ: https://elibrary.ru; Web of Science: https://www.webofscience.com; Scopus: https://www.scopus.com; Mathnet: http://www.mathnet.ru.

Подписано в печать 21.10.2025.
Формат 60х84/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. 2 усл.п.л.
Тираж 130 экз. Заказ №_____
Отпечатано с готового оригинал-макета
в издательской типографии «Принт Центр»
г.Нальчик, ул. Братьев Кушховых 79 «А»
тел.: 8-928-081-03-47
www.print07.ru